

实验指导：人口增长模型及其数量预测

一、实验目的及意义

- [1] 学习由实际问题去建立数学模型的全过程；
- [2] 训练综合应用数学模型、微分方程、函数拟合和预测的知识分析和解决实际问题；
- [3] 应用 matlab 软件求解微分方程、作图、函数拟合等功能，设计 matlab 程序来求解其中的数学模型；
- [4] 提高论文写作、文字处理、排版等方面的能力；

通过完成该实验，学习和实践由简单到复杂，逐步求精的建模思想，学习如何建立反映人口增长规律的数学模型，学习在求解最小二乘拟合问题不收敛时，如何调整初值，变换函数和数据使优化迭代过程收敛。

二、实验内容

- 1. 数学建模的基本方法；
- 2. 查阅资料理解 Malthus 人口指数增长模型和 Logistic 模型；
- 1. Matlab 软件中曲线拟合函数的异常情况处理；
- 4. 误差分析与模型检验。

三、实验步骤

- 1. 分析理解 Malthus 人口指数增长模型和 Logistic 模型；
- 2. 利用 Matlab 软件求解上述两个模型；
- 3. 设计数据拟合方法；
- 4. 编写 M 文件, 保存文件并运行观察运行结果(数值或图形)，并进行误差分析；
- 5. 利用至少两种模型预测人口数量；
- 6. 分析、整理和总结，写出实验报告。

四、实验要求与任务

从1790—1980年间美国每隔10年的人口记录如表1所示：

表1

年份	1790	1800	1810	1820	1830	1840	1850
人口($\times 10^6$)	3.9	5.3	7.2	9.6	12.9	17.1	23.2
年份	1860	1870	1880	1890	1900	1910	1920
人口($\times 10^6$)	31.4	38.6	50.2	62.9	76.0	92.0	106.5
年份	1930	1940	1950	1960	1970	1980	
人口($\times 10^6$)	123.2	131.7	150.7	179.3	204.0	226.5	

用以上数据检验马尔萨斯(Malthus)人口指数增长模型，根据检验结果进一步讨论马尔萨斯人口模型的改进，并利用至少两种模型来预测美国2010年的人口数量。

提示1: Malthus 模型的基本假设是：人口的增长率为常数，记为 r 。记时刻 t 的人口为 $x(t)$ ，

(即 $x(t)$ 为模型的状态变量) 且初始时刻的人口为 x_0 , 于是得到如下微分方程:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

提示 2: 阻滞增长模型 (或 Logistic 模型) 由于资源、环境等因素对人口增长的阻滞作用, 人口增长到一定数量后, 增长率会下降, 假设人口的增长率为 x 的减函数, 如设 $r(x) = r(1 - x/x_m)$, 其中 r 为固有增长率 (x 很小时), x_m 为人口容量 (资源、环境能容纳的最

大数量), 于是得到如下微分方程:
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx(1 - \frac{x}{x_m}) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$